

DM de mathématiques n°5

Sujets d'oraux de concours – Corrigé

La partie obligatoire est notée sur 16 pts ± 4 pts pour le soin et la clarté. La partie facultative est notée sur 4 pts et s'ajoute à ce total, et la note est ramenée à 20 si elle devait dépasser 20.

Exercice 1 (Mines-Ponts PC)

On admet que si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial, alors toute fonction définie sur I , à valeurs réelles, continue et injective est strictement monotone. Pour tout x réel, on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. On pose :

$$\mathcal{E} = \{ f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R} \ f(f(x)) = x + 1 \}$$

Soit $f \in \mathcal{E}$.

1) Montrer que f est strictement croissante.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\implies f(f(a)) = f(f(b)) \\ &\implies a + 1 = b + 1 \\ &\implies a = b \end{aligned}$$

Donc f est injective. Comme f est continue, on en déduit qu'elle est strictement monotone. Il faut ensuite montrer qu'elle est strictement croissante.

Supposons par l'absurde que f est strictement décroissante. Comme f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, elle admettrait un point fixe (à justifier comme vu en TD) qu'on note α . Ainsi,

$$f(f(\alpha)) = \alpha + 1 \implies f(\alpha) = \alpha + 1 \implies \alpha = \alpha + 1$$

ce qui est absurde. Donc f n'est pas strictement décroissante. f est donc strictement croissante.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer l'égalité $f(x + 1) = f(x) + 1$.

$$\begin{aligned} f(f(x)) = x + 1 &\implies f(f(f(x))) = f(x + 1) \\ &\implies f(x) + 1 = f(x + 1) \end{aligned}$$

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer l'égalité $f(x) = f(\{x\}) + \lfloor x \rfloor$.

Par récurrence immédiate avec la question précédente, on a $f(x + k) = f(x) + k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Mais, partant de $f(X + 1) = f(X) + 1$ avec $X = x - 1$, on a aussi $f(x) = f(x - 1) + 1$, donc $f(x - 1) = f(x) - 1$. Par récurrence immédiate, $f(x - k) = f(x) - k$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(x + n) = f(x) + n$. Ainsi :

$$f(x) = f(\{x\} + \lfloor x \rfloor) = f(\{x\}) + \lfloor x \rfloor$$

- 4) On pose $d = f(0)$. Montrer l'encadrement $0 < d < 1$. On note g la restriction de f au segment $[0, d]$. Montrer aussi que g réalise une bijection de $[0, d]$ sur $[d, 1]$ et que celle-ci est continue et strictement croissante.

Tout d'abord, on a $f(f(0)) = 0 + 1$ donc $f(d) = 1$. De plus, par la question 2, on sait que

$$f(1) = f(0 + 1) = f(0) + 1 = d + 1$$

- Si $d \leq 0$, alors $f(d) \leq f(0) = d \leq 0$. Or $f(d) = 1$. Contradiction. Donc $\boxed{d > 0}$.
- Si $d \geq 1$, alors $f(d) \geq f(1) = d + 1$. D'où $f(d) > 1$ car $d > 0$. Or $f(d) = 1$. Contradiction. Donc $\boxed{d < 1}$

Enfin, comme $f(0) = d$ et $f(d) = 1$, et comme f est strictement croissante sur $[0, d]$, on a $f([0, d]) = [d, 1]$ et g est une bijection de $[0, d]$ sur $[d, 1]$ par le théorème de la bijection monotone.

- 5) Décrire les éléments de l'ensemble $\mathcal{E}$.

On raisonne par analyse-synthèse.

- Soit f une fonction de $\mathcal{E}$. Par la question 3, il suffit de déterminer $f(x)$ pour $x \in [0, 1[$ pour en déduire f sur $\mathbb{R}$. Soit donc $x \in [0, 1[$.
 - Si $x \in [0, f(0)]$, alors $f(x) = g(x)$
 - Si $x \in [f(0), 1[$, alors $f(f(x)) = x + 1$ mais $f(x) \in [f(f(0)), f(1)] = [1, d + 1]$, donc $f(x) - 1 \in [0, d]$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= x + 1 \\ \implies f(f(x) - 1 + 1) &= x + 1 \\ \implies f(f(x) - 1) + 1 &= x + 1 \\ \implies g(f(x) - 1) &= x \\ \implies f(x) - 1 &= g^{-1}(x) \\ \implies f(x) &= 1 + g^{-1}(x) \end{aligned}$$

On trouve donc que f est entièrement déterminé par le couple (d, g) , i.e. par la valeur de $f(0)$ et la restriction de f à $[0, d]$.

- Réciproquement, soit $d \in]0, 1[$ et g une application bijective et strictement croissante de $[0, d]$ sur $[d, 1]$. Pour tout réel x , on pose :

$$f(x) = \begin{cases} g(\{x\}) + \lfloor x \rfloor & \text{si } 0 \leq \{x\} \leq d \\ 1 + g^{-1}(\{x\}) + \lfloor x \rfloor & \text{si } d < \{x\} < 1 \end{cases}$$

On va montrer que cette fonction f appartient à $\mathcal{E}$. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Comme g et g^{-1} sont continues, et que $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue en tout $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ il est clair que f est continue en tout réel x sauf les réels de la forme k avec $k \in \mathbb{Z}$ et $k + d$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

- Preuve de la continuité de f en $k + d$:

$$f((k + d)^-) = g(d^-) + k = 1 + k = f(k + d)$$

$$f((k + d)^+) = 1 + g^{-1}(d^+) + k = 1 + k$$

car $g^{-1}(d) = 0$ et que g^{-1} est continue. D'où f est continue en $k + d$.

— Preuve de la continuité de f en k :

$$f(k^+) = g(0^+) + k = d + k = f(k)$$

$$f(k^-) = 1 + g^{-1}(1^-) + \lfloor k^- \rfloor = 1 + d + k - 1 = d + k$$

d'où f est continue en k .

Ainsi, f est bien continue en tout point de $\mathbb{R}$. Il reste à montrer que f vérifie l'équation :

— Si $\{x\} \in [0, d[$, alors $g(\{x\}) \in [d, 1[$, de sorte que :

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= f(g(\{x\}) + \lfloor x \rfloor) \\ &= f(g(\{x\}) + \lfloor x \rfloor) \\ &= 1 + g^{-1}(g(\{x\}) + \lfloor g(\{x\}) \rfloor) + \lfloor x \rfloor \\ &= 1 + \{x\} + 0 + \lfloor x \rfloor \\ &= 1 + x \end{aligned}$$

— Si $\{x\} \in [d, 1[$, alors $g^{-1}(\{x\}) \in [0, d[$, de sorte que :

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= f(1 + g^{-1}(\{x\}) + \lfloor x \rfloor) \\ &= f(g^{-1}(\{x\}) + 1 + \lfloor x \rfloor) \\ &= g(g^{-1}(\{x\})) + \lfloor g^{-1}(\{x\}) \rfloor + 1 + \lfloor x \rfloor \\ &= \{x\} + 0 + 1 + \lfloor x \rfloor \\ &= 1 + x \end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathcal{E} = \left\{ x \mapsto \begin{cases} g(\{x\}) + \lfloor x \rfloor & \text{si } 0 \leq \{x\} \leq d \\ 1 + g^{-1}(\{x\}) + \lfloor x \rfloor & \text{si } d < \{x\} < 1 \end{cases} \mid \begin{cases} d \in]0, 1[& g \text{ est une bijection} \\ \text{croissante de } [0, d] \text{ sur } [d, 1] \end{cases} \right\}$$

Exercice 2 (Centrale MP) – munissez-vous d'un ordinateur avec Python installé

On rappelle la définition de la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$: $\|(a, b)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. De plus, pour tout ensemble fini E , on note $\text{card}(E)$ le nombre d'éléments de E . On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$C(x) = \{u \in \mathbb{Z}^2 \mid \|u\| \leq x\} \quad \text{et} \quad C^+(x) = C(x) \cap \mathbb{N}^2.$$

On note

$$N(x) = \text{card}(C(x)) \quad N^+(x) = \text{card}(C^+(x))$$

1) Écrire un programme Python qui calcule $N(x)$ et $N^+(x)$. (à réécrire sur la copie)

■ Cf le script du fichier Python accessible sur le site.

2) Vérifier numériquement que $4N^+(x) - N(x) - 4\lfloor x \rfloor$ est constant. (rien à mettre sur la copie)

■ Cf le script du fichier Python accessible sur le site.

3) Le démontrer.

D'après nos simulations numériques, la valeur constante en question est 3. Il nous faut donc montrer que pour tout réel $x \geq 0$,

$$4N^+(x) - N(x) - 4\lfloor x \rfloor = 3$$

Dans la suite, on fixe $x \in \mathbb{R}_+$ et on pose pour toute partie $D \subset \mathbb{Z}^2$:

$$\Gamma(D) := C(x) \cap D$$

alors

$$C(x) = \Gamma(\mathbb{Z}^2) \quad C^+(x) = \Gamma(\mathbb{N}^2)$$

De plus, on pose $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la rotation d'un angle $\frac{\pi}{2}$ (définie par $f(x, y) = (-y, x) \dots$). Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on note $f^k = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}$, avec $f^0 = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$. On dispose de la partition suivante de $\mathbb{Z}^2$:

$$\mathbb{Z}^2 = \{(0, 0)\} \cup \left(\bigcup_{k=0}^3 f^k((\mathbb{N}^*)^2) \right) \cup \left(\bigcup_{k=0}^3 f^k(\mathbb{N}^* \times \{0\}) \right)$$

On pose

$$A_k = \bigcup_{k=0}^3 f^k((\mathbb{N}^*)^2) \quad B_k = \bigcup_{k=0}^3 f^k(\mathbb{N}^* \times \{0\})$$

et grâce à la partition de $\mathbb{Z}^2$ ci-dessus, on vérifie (par distributivité de $\cap$ sur $\cup$) que

$$\begin{aligned} C(x) &= C(x) \cap \mathbb{Z}^2 \\ &= C(x) \cap \left(\{(0, 0)\} \cup \left(\bigcup_{k=0}^3 A_k \right) \cup \left(\bigcup_{k=0}^3 B_k \right) \right) \\ &= \Gamma(\{(0, 0)\}) \cup \left(\bigcup_{k=0}^3 \Gamma(A_k) \right) \cup \left(\bigcup_{k=0}^3 \Gamma(B_k) \right) \end{aligned}$$

De plus, comme $\{(0, 0)\}$, A_0 , B_0 et B_1 forme une partition de $\mathbb{N}^2$, on a :

$$C^+(x) = \Gamma(\{(0, 0)\}) \cup \Gamma(A_0) \cup \Gamma(B_0) \cup \Gamma(B_1)$$

Ainsi, en passant au cardinal, comme ces ensembles sont disjoints deux à deux, et que $\Gamma(\{(0, 0)\}) = \{(0, 0)\}$, on trouve que :

$$N(x) = 1 + \sum_{k=0}^3 \text{card}(\Gamma(A_k)) + \sum_{k=0}^3 \text{card}(\Gamma(B_k))$$

$$N^+(x) = 1 + \text{card}(\Gamma(A_0)) + \text{card}(\Gamma(B_0)) + \text{card}(\Gamma(B_1))$$

Or, par symétrie,

$$\text{card}(\Gamma(A_0)) = \dots = \text{card}(\Gamma(A_3))$$

$$\text{card}(\Gamma(B_0)) = \dots = \text{card}(\Gamma(B_3))$$

On en déduit que

$$N(x) = 1 + 4 \text{card}(\Gamma(A_0)) + 4 \text{card}(\Gamma(B_0))$$

$$N^+(x) = 1 + \text{card}(\Gamma(A_0)) + 2 \text{card}(\Gamma(B_0))$$

Ainsi,

$$4N^+(x) - N(x) = 3 + 4 \text{card}(\Gamma(B_0))$$

Or, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} (a, b) \in \Gamma(B_0) &\iff (a, b) \in C(x) \cap (\mathbb{N}^* \times \{0\}) \\ &\iff a \in \mathbb{N}^* \text{ et } b = 0 \text{ et } \|(a, b)\| \leq x \\ &\iff a \in \mathbb{N}^* \text{ et } b = 0 \text{ et } a \leq x \\ &\iff a \in \llbracket 1, \lfloor x \rfloor \rrbracket \text{ et } b = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, on trouve que $\Gamma(B_0)$ contient autant de vecteurs que d'éléments dans $\llbracket 1, \lfloor x \rfloor \rrbracket$, c'est-à-dire $\lfloor x \rfloor$. Ainsi, $\text{card}(\Gamma(B_0)) = \lfloor x \rfloor$. On en déduit que

$$4N^+(x) - N(x) = 3 + 4 \lfloor x \rfloor$$

ce qui donne le résultat voulu !

- 4) Tracer le graphe de l'application $x \mapsto \frac{N(x)}{x^2}$. (*reproduire le graphe sur la copie, inutile de mettre le code*)

Cf le script du fichier Python accessible sur le site.

- 5) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad N^+(n) = \sum_{k=0}^n \left(\left\lfloor \sqrt{n^2 - k^2} \right\rfloor + 1 \right)$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$,

$$(a, b) \in C^+(n) \iff \sqrt{a^2 + b^2} \leq n$$

Il suffit donc de compter les couples (a, b) de $\mathbb{N}^2$ qui vérifient $\sqrt{a^2 + b^2} \leq n$. Nécessairement, cela impose que $a \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $C_k^+(n)$ l'ensemble des vecteurs de $C^+(n)$ dont la première composante est k , i.e. les vecteurs de la forme (k, b) qui sont dans $C^+(n)$. Il est clair que la famille $(C_k^+(n))_{0 \leq k \leq n}$ forme une partition de $C^+(n)$. On a donc

$$N^+(n) = \sum_{k=0}^n \text{card}(C_k^+(n))$$

Or,

$$\begin{aligned} (a, b) \in C_k^+(n) &\iff \begin{cases} a = k \\ \sqrt{a^2 + b^2} \leq n \end{cases} \\ &\iff \sqrt{k^2 + b^2} \leq n \\ &\iff k^2 + b^2 \leq n^2 \quad \text{car } x \mapsto x^2 \text{ est croissante} \\ &\iff b^2 \leq n^2 - k^2 \\ &\iff b \leq \sqrt{n^2 - k^2} \quad \text{car } b \geq 0 \\ &\iff b \leq \left\lfloor \sqrt{n^2 - k^2} \right\rfloor \quad \text{car } b \text{ est entier} \\ &\iff b \in \left[0, \left\lfloor \sqrt{n^2 - k^2} \right\rfloor \right] \end{aligned}$$

On trouve donc autant de vecteurs dans $C_k^+(n)$ que de valeurs dans l'intervalle $\llbracket 0, \lfloor \sqrt{n^2 - k^2} \rfloor \rrbracket$.
Ainsi, $\text{card}(C_k^+(n)) = \lfloor \sqrt{n^2 - k^2} \rfloor + 1$. D'où

$$N^+(n) = \sum_{k=0}^n \left(\lfloor \sqrt{n^2 - k^2} \rfloor + 1 \right)$$

6) (question infaisable à ce stade, ne pas la faire!) Conjecturer un équivalent de $N(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$ et le démontrer.

Le graphe de la question 4 laisse penser que $N(x) \sim Cx^2$ avec $C \approx \pi$! Il est clair que N est une fonction croissante. Pour tout réel $x \geq 1$, on pose $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}^*$. On a donc

$$N(n) \leq N(x) \leq N(n+1)$$

Or, par la question 3,

$$N(n) = 4N^+(n) - 4n - 3$$

et par la question 5, on sait que :

$$\begin{aligned} N^+(n) &= \sum_{k=0}^n \left(\lfloor \sqrt{n^2 - k^2} \rfloor + 1 \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \lfloor \sqrt{n^2 - k^2} \rfloor + n + 1 \end{aligned}$$

On cherche d'abord un équivalent de $\sum_{k=0}^n \lfloor \sqrt{n^2 - k^2} \rfloor$ (on verra que le $n+1$ sera négligeable). Or, pour tout entier k entre 0 et n :

$$\sqrt{n^2 - k^2} - 1 \leq \lfloor \sqrt{n^2 - k^2} \rfloor \leq \sqrt{n^2 - k^2}$$

d'où

$$\sum_{k=0}^n (\sqrt{n^2 - k^2} - 1) \leq \sum_{k=0}^n \lfloor \sqrt{n^2 - k^2} \rfloor \leq \sum_{k=0}^n \sqrt{n^2 - k^2}$$

Or,

$$\sum_{k=0}^n \sqrt{n^2 - k^2} = n \sum_{k=0}^n \sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}} = n^2 \times \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}}$$

et par une somme de Riemann, on sait que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}} \right) = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^n \sqrt{n^2 - k^2} \sim n^2 \frac{\pi}{4}$$

Par ailleurs,

$$\sum_{k=0}^n (\sqrt{n^2 - k^2} - 1) = \sum_{k=0}^n \sqrt{n^2 - k^2} - (n+1)$$

et comme

$$\sum_{k=0}^n \sqrt{n^2 - k^2} \sim n^2 \frac{\pi}{4}$$

la suite de terme général $n + 1$ est négligeable devant $\sum_{k=0}^n \sqrt{n^2 - k^2}$. On en conclut que

$$\sum_{k=0}^n \left(\sqrt{n^2 - k^2} - 1 \right) \sim n^2 \frac{\pi}{4}$$

Par encadrement, on a donc

$$\sum_{k=0}^n \left\lfloor \sqrt{n^2 - k^2} \right\rfloor \sim n^2 \frac{\pi}{4}$$

Ainsi, on en déduit que

$$N^+(n) = \sum_{k=0}^n \left\lfloor \sqrt{n^2 - k^2} \right\rfloor + n + 1 \sim \frac{\pi}{4} n^2$$

Et par suite ($4n + 3$ étant négligeable devant $N^+(n)$) :

$$N(n) = 4N^+(n) - 4n - 3 \sim \boxed{\pi n^2}$$